Do finito ao infinito

Quatro amigos tinham acabado a partida de bisca lambida pós-almoço, com todos os prolongamentos que as regras lhes atribuem. Isto é, do par perdedor as cartas decidiram quem pagaria toda a despesa. A quantia não era por aí além, mas Ernesto remoía mentalmente um estratagema que lhe permitisse salvar o seu orgulho ferido. Por outras palavras: que não fosse ele a pagar!

Ao fim de algum tempo interrompeu o silêncio que se impusera no pós-confronto:

-Tenho uma proposta a fazer. Se algum de vocês me responder corretamente ao desafio que vos proponho, pagarei a conta a dobrar. Caso contrário não desembolso nada. Aceitam ?

Os três vencedores do dia conheciam muitos argumentos que Ernesto usava para se furtar a puxar pela carteira. Mas este era inovador! Acederam, sobretudo para desanuviar o ambiente pesado que se instalara.

-Muito bem. Pelo sim, pelo não, mando já vir outra rodada.

- A questão é a seguinte:

Qual é a soma de uma sequência infinita de números 1 alternados com -1. ? Ou seja, qual o valor de

$$1-1+1-1+1-1+\ldots\ ?$$

- Ó Arnesto, disse o Chico de imediato, desta vez saiu-te o tiro pela culatra! Isso nem tem espinhas! Associo os dois primeiros números, os outros dois a seguir e assim sucessivamente. Como cada parcela dá zero, a soma será zero. Agora paga que estou com pressa.

Após alguns momentos, o Vicente alvitrou:

Talvez tenhas razão! Mas eu não fiz assim: somava todos os 1 e todos os -1 e como seriam em igual número a soma será nula.

Silva, mais pensador, lançou a sua opinião:

- Vocês não puxam pela massa cinzenta ! Quando associam os números dois a doía ou três a três, como têm a garantia de que não sobra nenhum deles ? A resposta é mais refinada: se não sobrar nenhum número depois a soma é zero. Caso contrário dá 1 … ou talvez -1, depende das contas…

Afinal, na opinião do leitor, quem deverá pagar a conta ?

O Ernesto teve uma despesa a dobrar ou conseguiu fugir dela ?

Creio que para o leitor, será mais interessante analisar o próprio desafio do que qual o desgraçado a pagar a conta.

No cálculo da expressão

$$1-1+1-1+1-1+\ldots$$

o mais importante são as reticências. Elas significam que se trata de uma adição de um número infinito de parcelas. Ora as propriedades que se utilizam numa adição com um número finito de parcelas, nem sempre são válidas quando o número de parcelas é infinito.

Por exemplo: o argumento do Chico (a soma de infinitos zeros dá zero) é falso. Isto porque não existe nenhuma operação aritmética que garanta tal resultado. Poderá ser zero ou não… A soma de infinitos zeros pode-se representar por $0 \times \infty$ (o oito deitado é o símbolo de infinito) e como, à partida, não é possível determinar o seu valor, ele dependerá de cada situação concreta. Por isso de designa como um símbolo de indeterminação.

Aliás com algumas ferramentas matemáticas (as chamadas séries numéricas) prova-se que a soma da expressão não é determinável.

O Ernesto foi desonesto! Apresentou um imbróglio sem resposta óbvia! Mas livrou-se de pagar a conta.

A introdução do conceito de infinito pode levar a conclusões pouco lógicas ou aparentemente impossíveis. Exemplifiquemos uma outra.

O matemático francês Émile Borel (1871-1956) imaginou a seguinte situação: um macaco em frente a um computador (Borel indicava uma máquina de escrever, mas este é já um objeto de museu…) a escrever letras ao acaso.

Se lhe dessemos um tempo infinito, o primata acabaria por escrever um canto dos Lusíadas ou mesmo todo o poema épico.

Este contexto ficou conhecido como o teorema do macaco infinito ou a parábola dos macacos datilógrafos e foi apresentada como uma aplicação do lema de Borel-Cantelli (substituindo Camões por Shakespeare).

Aconselho, contudo, o leitor, caso tenha macacos em casa, a não tentar reconstituir a experiência. Ela já foi tentada em Inglaterra, na Universidade de Plymouth, e os símios destruíram as máquinas antes sequer de escrever qualquer sequência de letras!

Feliz Minhós

Professor do Departamento de Matemática, ECT da Universidade de Évora