O Princípio de Indução Matemática

A sequência dos números naturais 1,2,3,4,… não tem fim, dado que para qualquer número natural n podemos sempre escrever o número natural seguinte, n+1. O mesmo será dizer que existem infinitos números naturais. Este é o mais simples exemplo matemático do infinito. O procedimento de passagem de n a n+1 que gera a sequência infinita de naturais é também a base de um dos conceitos fundamentais do raciocínio matemático, o princípio de indução matemática.

Indução significa consequência retirada de factos examinados. As ciências naturais, por exemplo, recorrem frequentemente a sequências (finitas) de observações de um dado fenómeno para enunciar uma lei geral. Uma lei deste tipo terá sempre uma validade limitada: tendencialmente será verificada, mas poderá falhar em certas ocasiões.

Pelo contrário, a indução matemática é utilizada para provar que determinado resultado é válido para um número infinito sequencial de casos, isto é, que vale para o primeiro, segundo, terceiro e assim sucessivamente, sem exceção.

Para melhor compreendermos, consideremos a seguinte afirmação: "Desenhando n linhas retas numa folha de papel, dividimos a folha em não mais de 2^n partes". Para provar esta afirmação para qualquer valor de n, não basta mostrar que é verdadeira para os primeiros 10, 100 ou mesmo 100000 casos. Teremos de usar um método que garanta a validade da afirmação para qualquer valor de n. Para n=1 é obviamente verdadeira, pois cada linha reta desenhada numa folha de papel divide-a em duas partes. Se desenharmos agora uma segunda linha (distinta da primeira), cada uma das duas partes será dividida em duas novas partes, desde que a segunda linha intersecte a primeira no interior da folha. Caso contrário teremos apenas três partes. Em qualquer dos casos, para n=2, temos no máximo $2\text{x}2=2^2$ partes. Adicionemos agora uma terceira linha. Cada uma das partes anteriores será dividida em duas novas partes, ou não será dividida pela nova linha. Consequentemente a soma das partes, no caso n=3, será menor que $2\text{x}2^2=2^3$. Sabendo que este caso é verdadeiro, podemos provar o seguinte da mesma forma, e assim sucessivamente. A ideia essencial para provar o nosso resultado para qualquer valor de n depende de duas etapas:

a) O resultado é válido para o primeiro caso (n=1).

b) A existência de um argumento geral garantindo que se o resultado é válido para qualquer n, então é válido para n+1.

Estas duas condições são suficientes para assegurar a veracidade da afirmação feita, para qualquer valor de n. É este o princípio de indução matemática. A ideia é na realidade muito simples de compreender, basta pensar no efeito sequencial de dominós a cair. Suponhamos que:

a) O primeiro dominó cai.

b) Se um qualquer dominó cair, o dominó seguinte também cairá.

Podemos então concluir que todos os dominós cairão.

Luís Bandeira

Diretor do Mestrado em Matemática para o Ensino, Universidade de Évora