BIOMATEMÁTICA

Carlos Braumann

braumann@uevora.pt

DMAT/CIMA Universidade de Évora

Resumo

- O que é a Biomatemática?
- Modelo malthusiano de crescimento populacional
- Extensão a ambientes com perturbações aleatórias
  - Utilização financeira do mesmo modelo
- Modelos com dependência da densidade
  - Modelo logístico
  - Modelo de Gompertz
  - Modelo de Gompertz em ambiente aleatório
  - Aplicação ao crescimento de indivíduos
- Modelos de pesca
- Modelos de várias populações

O que é a Biomatemática?

- Utilização de modelos matemáticos no estudo de problemas biológicos.
- ESMTB, SMB, …, revistas
- Modelos e realidade
- Métodos matemáticos inspirados em processos biológicos

O que é a Biomatemática?

ALGUMAS ÁREAS

- Ecosistemas
- Fisiologia
- Hemodinâmica
- Neurociências
- Morfogénese
- Epidemiologia
- Sequenciação genética
- Genética de populações e evolução
- Demografia
- Imagiologia
- Ensaios clínicos
- ………..

O que é a Biomatemática?

ÁREA DE DINÂMICA DE POPULAÇÕES

- Os pioneiros: Lotka, Volterra, Kostitzin, Pearl, Verhulst
- Uma ou várias populações (competição, predação, simbiose, parasitismo,…)
- Populações estruturadas (sexo, grupo etário, outros grupos, aleatoridade demográfica)
- Tempo discreto e tempo contínuo
- Ambiente fixo e variável (determinístico ou aleatório)
- Sujeitas ou não a pesca ou caça
- Fenómenos migratórios
- Variabilidade geográfica
- …………………….

Modelo malthusiano de crescimento populacional

Crescimento de uma população sem limitações ambientais e sem migrações

Crescimento de capital com taxa de juro fixa

$N(t)$ tamanho da população no instante $t \geq 0$

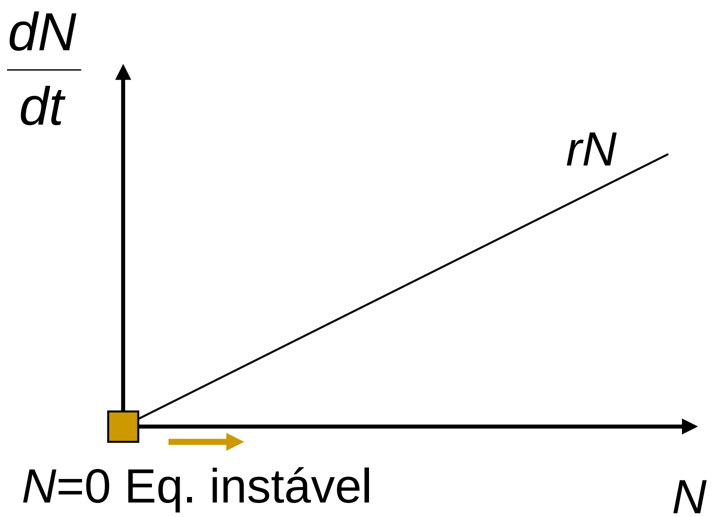
$$N(0)=N_0>0$$

$$\Delta N(t)= N(t+\Delta t)-N(t) \cong (r\,\Delta t)\,N(t) \qquad \frac{\Delta N(t)}{\Delta t} \cong rN(t)$$

$$dN(t) = rN(t)dt \qquad \frac{dN(t)}{dt} = rN(t)$$

Modelo malthusiano de crescimento populacional

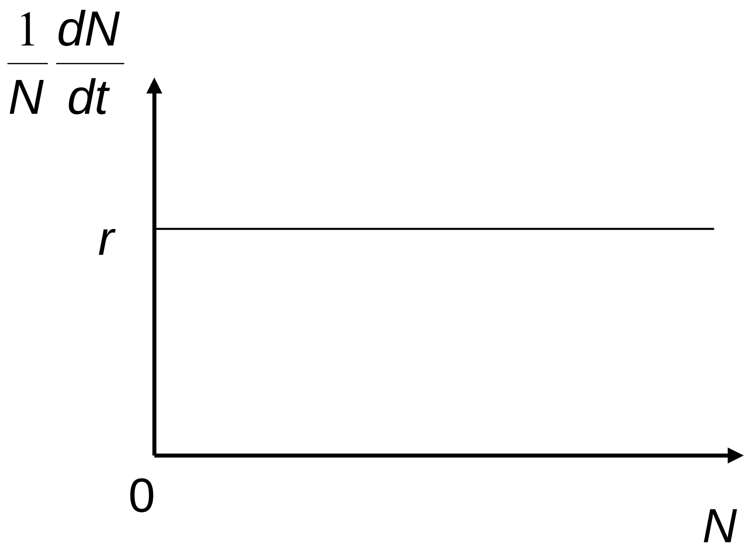
$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)$$



N=0 Eq. instável para *r*>0

$$\frac{1}{N(t)}\frac{dN(t)}{dt} = r$$

Taxa de crescimento (*per capita*) constante



Modelo malthusiano de crescimento populacional

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)$$

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = r$$

$$(\ln N(t))' = r$$

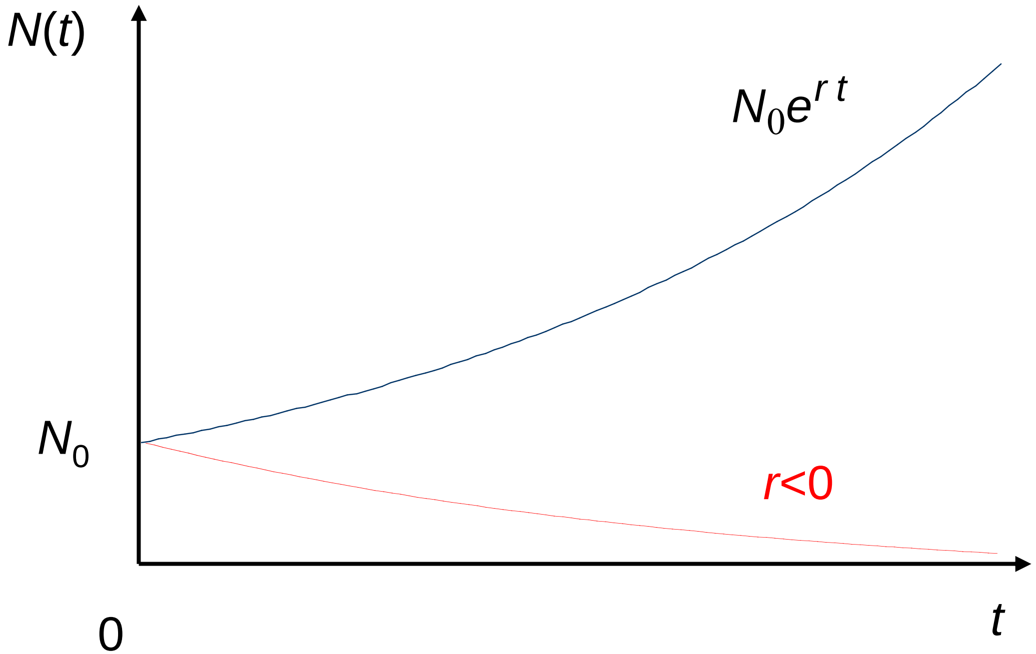
$$\ln N(t) = rt + C$$

$$\ln N_0 = C$$

$$\ln N(t) = rt + \ln N_0$$

$$\ln \frac{N(t)}{N_0} = rt$$

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$



Aplica-se também a capital com taxa de juro fixa

slides

Perturbações aleatórias do ambiente (ou do mercado – acções)

$B(t)$ perturbações acumuladas até ao instante $t \geq 0$

Processo estocástico

$B(0)=0$

$B(t)$ tem distribuição N $(0, \sigma^2 t)$

$\Delta B(t) = B(t+\Delta t) - B(t)$

incrementos independentes

Processo de Wiener

$W(t) = B(t) / \sigma$ tem distribuição $N(0, t)$

processo de Wiener padrão (movimento browniano)

$\Delta N(t) \cong (r\, \Delta t + \Delta B(t))\, N(t)$

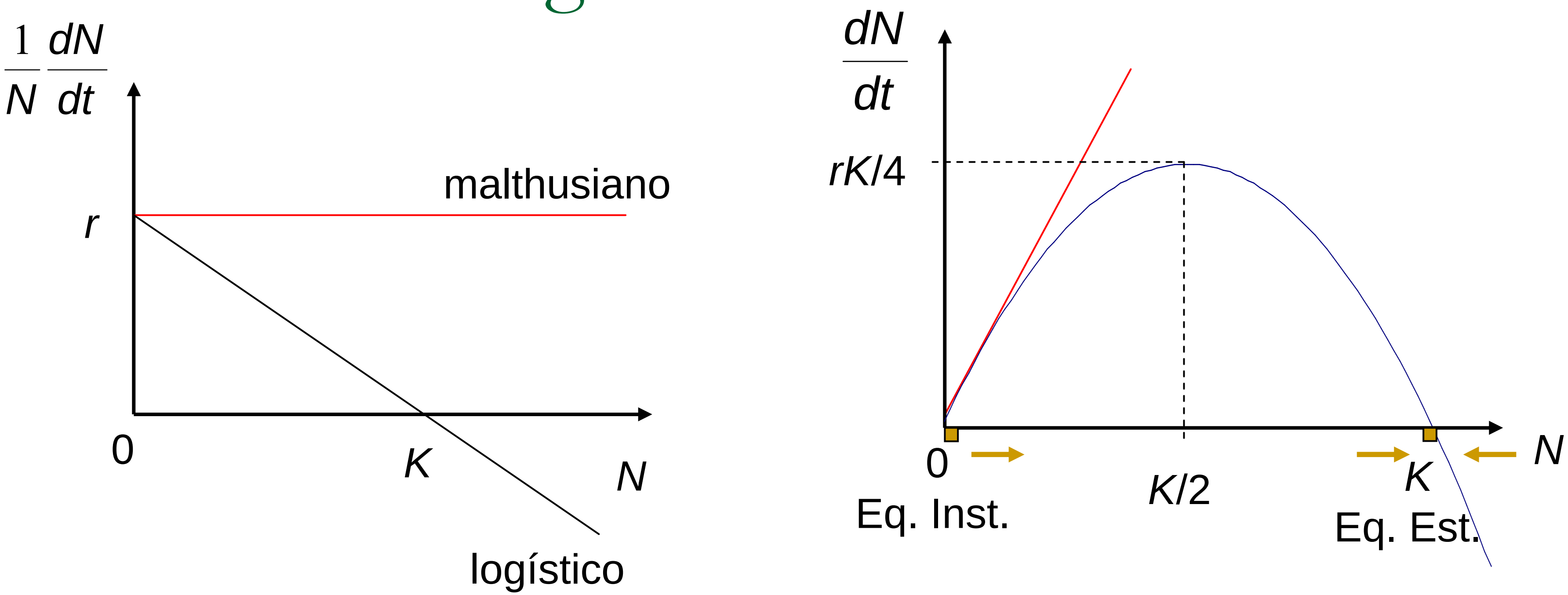
$\mathrm{d}N(t) = r\, N(t)\, dt + \sigma N(t)\, dB(t)$

EDE modelo de Black-Scholes solução é processo estocástico

slides

Modelos com dependência da densidade

Modelo logístico ou de Pearl-Verhulst



$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r\left(1-\frac{N}{K}\right) \qquad \frac{dN}{dt} = rN\left(1-\frac{N}{K}\right)$$

$r > 0$

$K > 0$ capacidade de sustento do meio

Modelo logístico

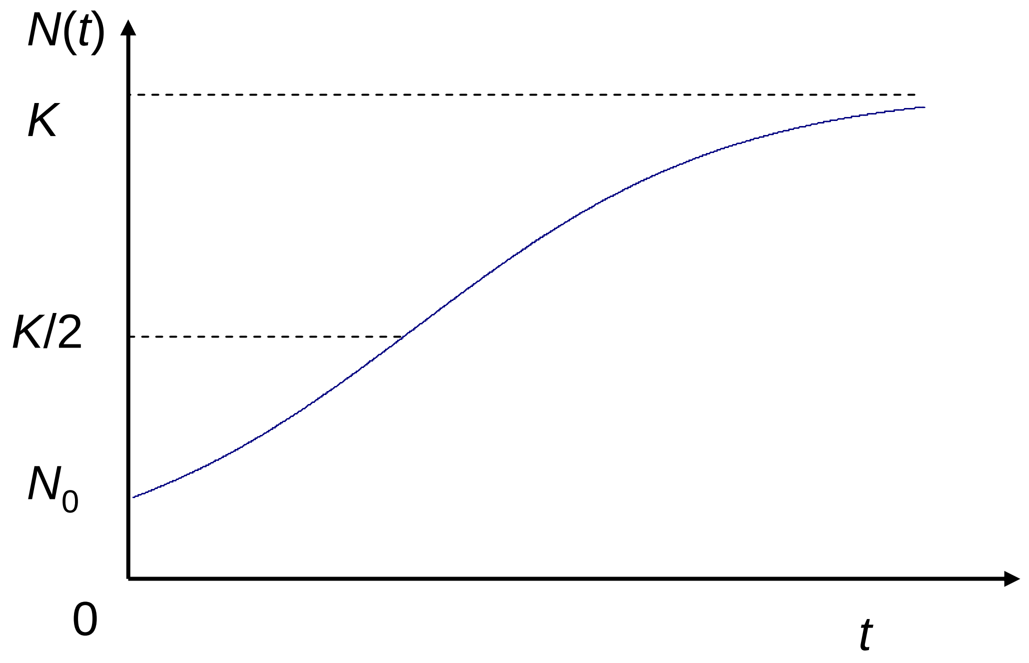
$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

$$\frac{N'}{N(1-N/K)} = r$$

$$\frac{N'}{N} - \frac{(-1/K)N'}{1-N/K} = r$$

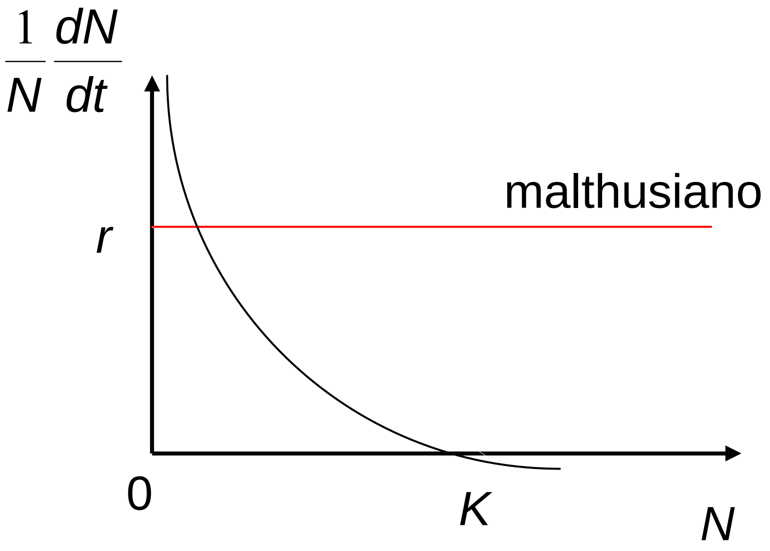
$$\ln N(t) - \ln(1 - N(t)/K) = rt + C$$

$$\ln N_0 - \ln\,(1 - N_0/K) = C$$



$$N(t) = \frac{K}{1 + (K/N_0 - 1)e^{-rt}} \to K \text{ quando } t \to +\infty$$

Modelo de Gompertz



$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r\left(\ln\frac{K}{N}\right)$$

$r > 0$

$K > 0$ capacidade de sustento do meio

Modelo geral

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = g(N)$$

$g : (0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$

de classe C^1 estritamente decrescente com $g(+\infty)<0$.

$g(0^+)<0$ N=0 glob. assint. estável.

Há extinção $N(t) \to 0$

$g(0^+)>0$ N=0 instável e N=K glob. assint. estável.

Não há extinção e $N(t) \to K$

Modelo geral com flutuações aleatórias do ambiente (Braumann 1999,...)

$$dN = g(N)Ndt + \sigma NdW(t)$$

$g(0^+)<0$ Há extinção $N(t) \rightarrow 0$

$g(0^+)>0$ Não há extinção mas $N(t)$ não tende para K

Solução é processo estocástico

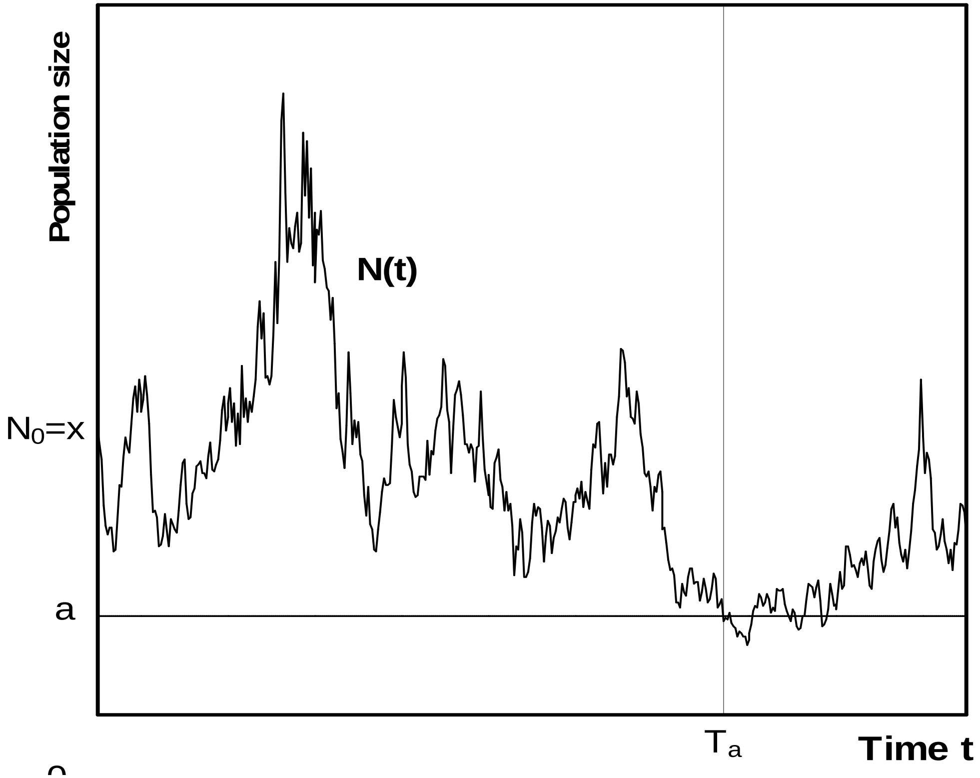
$F_{N(t)}(x) \rightarrow F(x)$ com f.d.p. (densidade estacionária)

Extinção "matemática" e extinção realista

Carlos e Braumann (2005,2006) tempos de extinção

Modelo geral com flutuações aleatórias do ambiente

$$dN = g(N)Ndt + \sigma NdW(t)$$



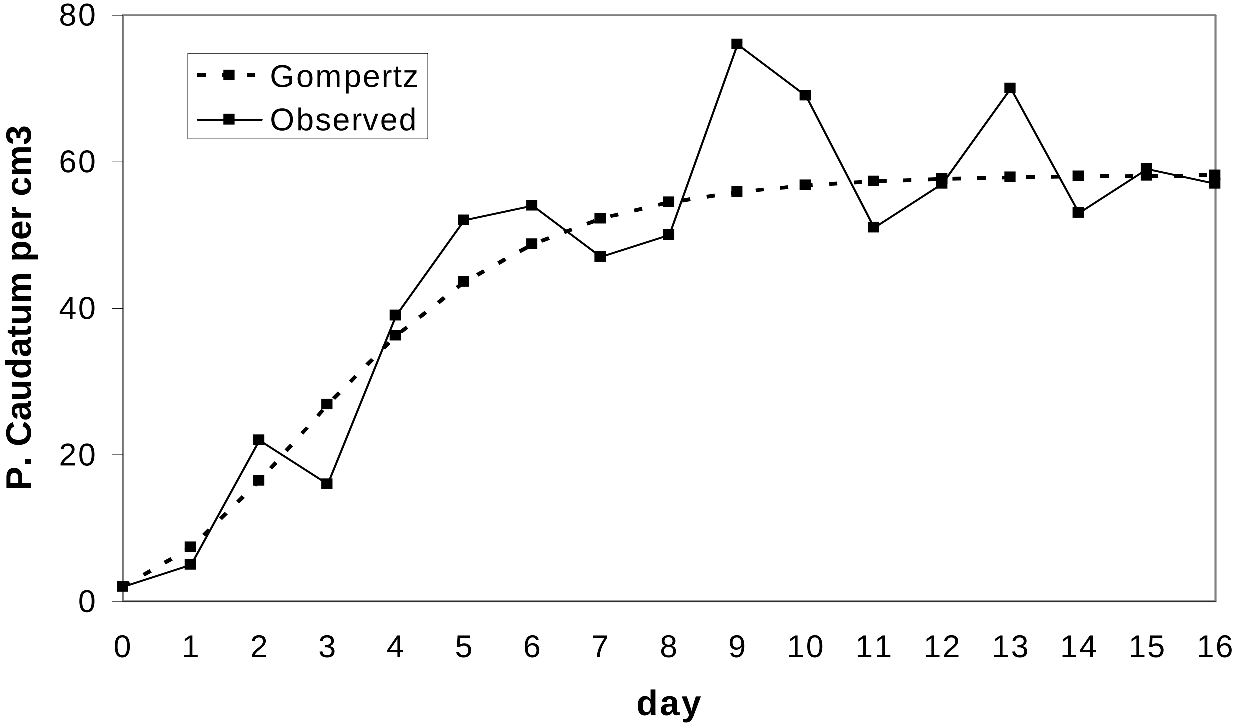
Extinção realista

Modelo geral com flutuações aleatórias do ambiente

$$dN = g(N)Ndt + \sigma N dW(t)$$

Estimação

$\hat{K}$=58,2±23,2 ind/cm3



Previsão

Ecosistemas

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Slide

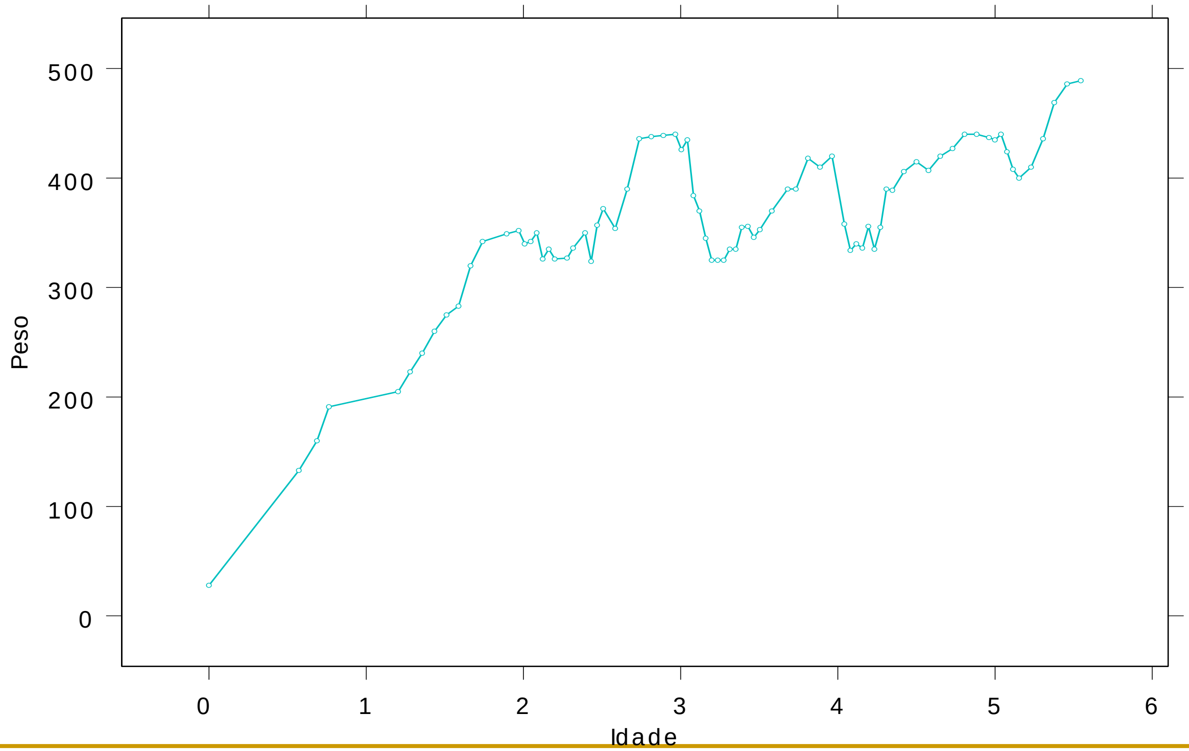
Crescimento individual

Dados do peso de bovinos mertolengos da estirpe rosilho (dados Carlos Roquete).

A curva a estudar corresponde à evolução do peso de um animal.

Projecto FCT (com Patrícia Filipe): Modelos estocásticos.

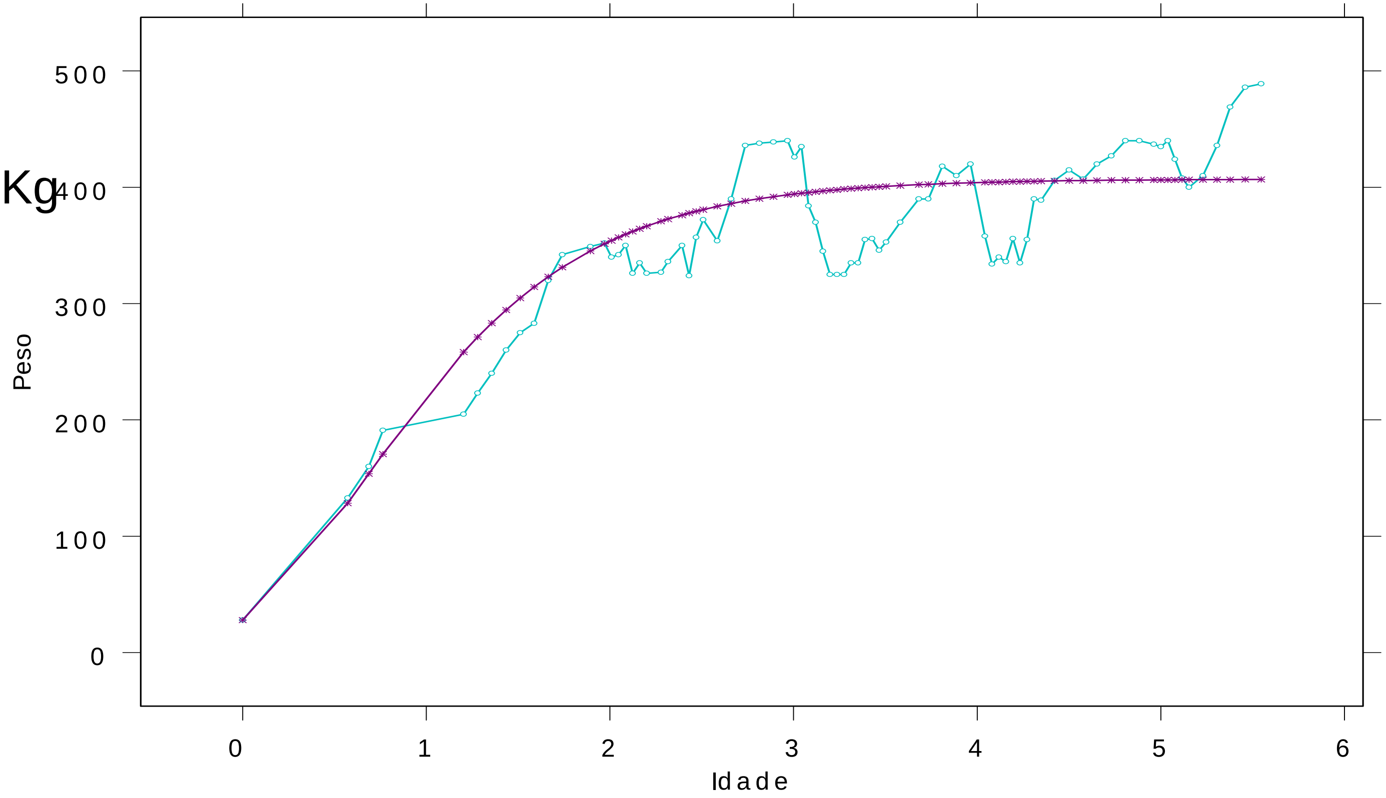
79 observações



$\sigma = 0$

Exemplo: Modelo de Gompertz

K^=407,1 Kg



Objectivos

- Estudo propriedades modelos gerais
- Estimação e previsão
- Quantos dias para a maturidade?
- Data mais conveniente para abate
- Distribuição de probabilidades dos pesos no instante t e assintótica
- Estudo das diferenças individuais entre os K

Pescas

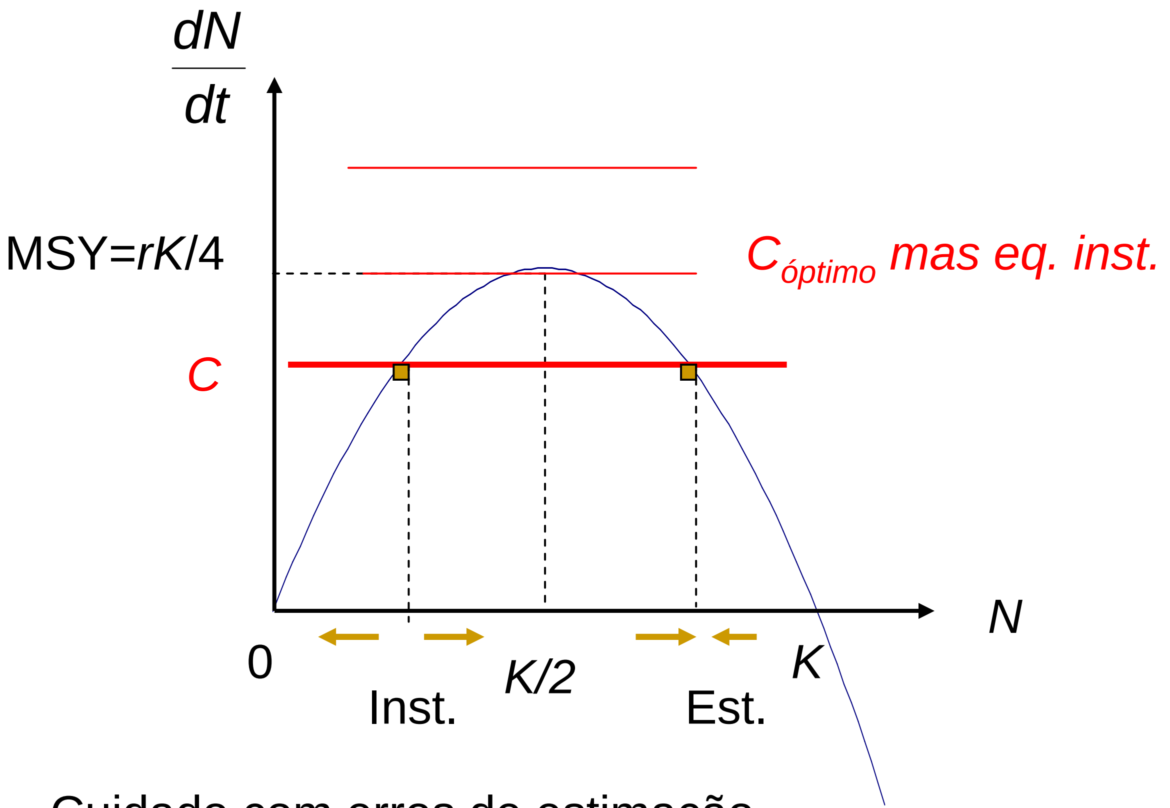
Capturas constantes

Modelo logístico

$$\frac{dN}{dt} = r(1 - N/K)N - C$$

Pescas

Capturas constantes



Cuidado com erros de estimação

Pescas

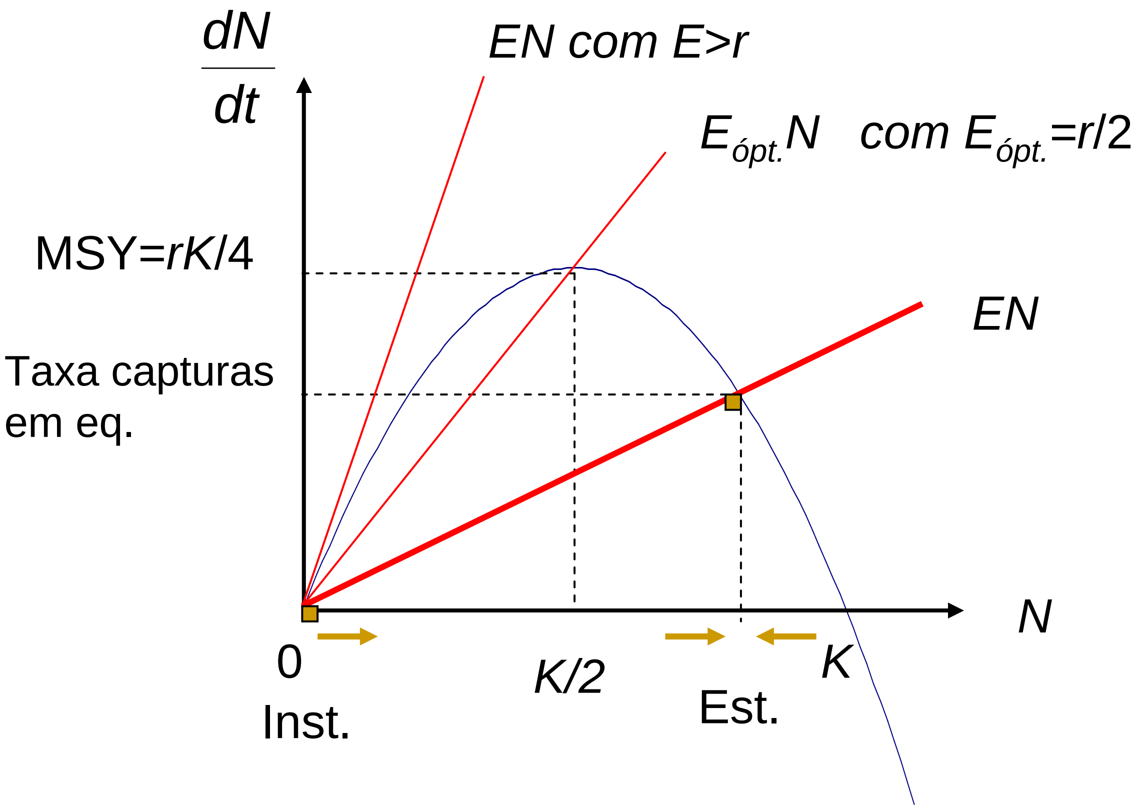
Esforço constante

Modelo logístico

$$\frac{dN}{dt} = r(1 - N/K)N - EN$$

Pescas

Esforço constante



Pesca

Modelos gerais

$$\frac{dN}{dt} = g(N)N - h(t)N$$

h(*t*) *esforço de pesca*

Como escolher *h*(*t*) para optimizar captura acumulada descontada?

Controlo óptimo

Caso *h*(*t*) = *h*(*N(t)*); estudo equilíbrios óptimos

Ambiente aleatório (Braumann 1999, 2001)

Conclusão

- Demos uma pequena amostra de uma pequena área da Biomatemática.
- É um mundo aberto, com muita investigação teórica e aplicada feita e mais ainda por fazer.

Alguma bibliografia recomendada

- Frauenthal, J. C. (1980). *Mathematical Modeling in Epidemiology*. Springer-Verlag, Berlin.
- Ginzburg, L. R. e Golenberg, E. M. (1985). *Lectures in Theoretical Population Biology.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Hallam, T. G. e Levin, S. A. (editores) (1986). *Mathematical Ecology. An Introduction.* Springer-Verlag, Berlin.
- Hillion, A. (1986). *Les théories Mathématiques des Populations.* Colecção "Que sais-je?", Presses Universitaires de France, Paris
- Hoppensteadt, F. C. e Peskin, C. S. (1992). *Mathematics in Medicine and the Life Sciences.* Springer-Verlag, New York.
- Murray, J. D. (1989, third edition, 2003). *Mathematical Biology.* Springer-Verlag, Berlin.
- Tuljapurkar, S. D. e Caswell, H. (1996). *Structured-Population Models in Marine, Terrestial, and Freshewater Systems*. Population and Community Biology, Series 18. Chapman and Hall.
- Wilson, E. O. e Bossert, W. H. (1971). *A Primer of Population Biology.* Sinauer, Sunderland, Massachusetts.

Mais alguma bibliografia recomendada

- Arnold (1974). Stochastic Differential Equations: Theory and Applications. Wiley, New York.
- Bailey, N. T. J. (1964; Wiley Classics Library Edition 1990). *The Elements of Stochastic Processes with applications to the natural sciences.* Wiley, New York.
- Braumann, C. A. (1985). *Introdução às Equações Diferenciais Estocásticas e Aplicações.* Edições SPE, Lisboa.
- Caswell, H. (1989, 2nd edition 2001). *Matrix Population Models: Construction, Analysis, and Interpretation.* Sinauer, Sunderland, Massachusetts.
- Crow, J. F. & Kimura, M. (1970). *An Introduction to Population Genetics Theory.* Harper & Row, New York.
- Doolittle, D. P. (1987). *Population Genetics: Basic Principles.*Springer-Verlag, Berlin.
- Edelstein-Keshet, L. (1988). *Mathematical Models in Biology*, Random House, New York. (geral, útil para uma primeira abordagem)
- Hirsch, M. W. and Smale S. (1974). Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra. Academic Press, New Yorrk.
- Karlin, S. e Taylor, H. M. (1975). *A First Course in Stochastic Processes. (second edition).* Academic Press, New York.
- Karlin, S. e Taylor, H. M. (1981). *A Second Course in Stochastic Processes.* Academic Press, Orlando.
- Luenberger, D. G. (1979). *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models, and Applications.* John Wiley and Sons. New York.
- Mangel, M. (editor) (1990). *Classics of Theoretical Biology (Part one).* Special issue of the *Bulletin of Mathematical Biology* **52.**
- Mangel, M. (editor) (1991). *Classics of Theoretical Biology (Part two).* Special issue of the *Bulletin of Mathematical Biology* **53.**
- Mangel, M. (editor) (1992). *Bioeconomics and Behavioural Ecology.* Special issue of the *Bulletin of Mathematical Biology* **54.**
- Nagilaky, T. (1992). *Introduction to Theoretical Population Genetics.* Springer-Verlag, Berlin.
- Øksendal, B. (1985; sixth edition 2003). *Stochastic Differential equations. An Introduction with Applications.* Springer-Verlag. Berlin.
- Scudo, F. M. e Ziegler, J. R. (1978). *The Golden Age of Theoretical Ecology:1923-1940. A Collection of Works by V. Volterra, V. A. Kostitzin, A. J. Lotka and A. N. Kolmogoroff.* Springer-Verlag, Berlin.
- *Seber, G. A. F. (1982). *The estimation of animal abundance and related parameters (2nd ed.)*, London: Charles W. Griffin.
- Tuljapurkar, S. D. (1990). *Population Dynamics in Variable Environments.* Springer-Velarg, New York.
- Williams, B.K, Nichols, J.D., and Conroy, M. (2002). Analysis and Management of Animal Populations. Academic Press.
- Yodzis, P. (1989). *Introduction to Theoretical Ecology.* Harper & Row, New York.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

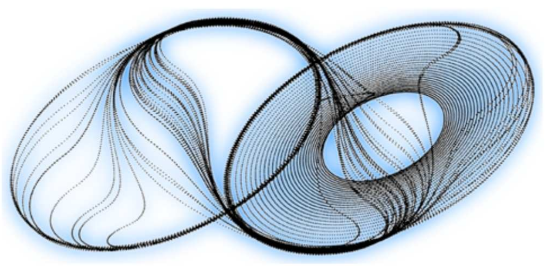
u·évora

ÁREA DEPARTAMENTAL DE CIÊNCIAS EXACTAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

FORMAÇÃO AVANÇADA

CURSOS NO ÂMBITO DE BOLONHA

- **MESTRADO EM MATEMÁTICA E APLICAÇÕES**
  Formação Superior em Matemática Teórica e Aplicada
  www.dmat.uevora.pt/ensino/mma
- **MESTRADO EM MODELAÇÃO ESTATÍSTICA E ANÁLISE DE DADOS**
  Vocacionado para Profissionais e Investigadores de Várias Áreas
  www.dmat.uevora.pt/ensino/mmead
- **MESTRADO EM MATEMÁTICA PARA O ENSINO**
  Formação Contínua de Professores
  www.dmat.uevora.pt/ensino/mme
- **DOUTORAMENTO EM MATEMÁTICA**
  www.dmat.uevora.pt/ensino/dm



ACÇÕES DE FORMAÇÃO CONTÍNUA

www.dmat.uevora.pt/ensino/afc

Amostragem
Análise de Dados com software Estatístico - nível básico
Análise de Dados com software Estatístico - nível avançado
Análise Real Segundo uma Abordagem Histórica
Estatística para a Saúde I
Estatística para a Saúde II
Optimização
Planeamento Experimental
Teoria dos Grafos

Evolução do Pensamento Matemático
Cálculo Financeiro Avançado
Caos e Fractais na Sala de Aula
Estatística na Óptica do Médico Utilizador
Matemática Computacional para os Professores
Métodos e Técnicas de Análise de Dados Multivariados
Modelos Estatísticos
Princípios de Geometria
Princípios de Probabilidades e Estatística
Séries Temporais Ambientais

Estas **acções de formação** são na sua grande maioria **unidades curriculares ou módulos de unidades** dos Mestrados e podem ser **creditadas** para efeitos de prosseguimento de estudos nesses Mestrados.

www.dmat.uevora.pt

Contactos

Universidade de Évora
Departamento de Matemática
Colégio Luís Verney
Rua Romão Ramalho, 59
7000-671 Évora
Tel: +351 266745370
Fax: +351 266745393

www.dmat.uevora.pt