A Crónica Matemática

Em virtude da versatilidade da formação que um curso de Matemática/Estatística proporciona, os cursos destas áreas são dos cursos com menores taxas de desemprego no país. Para mostrar o importante papel da Matemática na sociedade, o Departamento de Matemática da Universidade de Évora irá apresentar algumas crónicas sobre as aplicações da Matemática.

Optimização linear: O caso concreto do problema dos transportes

Um dos campos que mais aplicabilidade tem no dia a dia, é o da optimização. Abordaremos apenas um dos problemas mais simples na optimização linear: O problema dos transportes.

A primeira publicação acerca deste problema deve-se a Gaspard Monge no final do século XVIII. Mais tarde no período de 1938 a 44 e de forma independente também Kantorovich, Hitchcock, Koopmans e Dantzig estudaram o problema referido.

Vamos apresentar um exemplo que consiste em fornecer três cantinas com consumos de: 10, 20 e 60 Toneladas a partir de duas herdades com produções de: 40 e 50 toneladas. Estas quantidades são apresentadas no quadro seguinte em que acrescentámos também os custos unitários de transporte Origem → Destino, representados normalmente por C_{ij}=**Custo** de transporte unitário da Origem i para o Destino j.

Custos €/Ton	Cantina 1	Cantina 2	Cantina 3	**Produ.[Ton]**
Herdade 1	*2 €/Ton*	*3 €/Ton*	*4 €/Ton*	**40**
Herdade 2	*7 €/Ton*	*6 €/Ton*	*5 €/Ton*	**50**
Consum.[Ton]	**10**	**20**	**60**	

Neste problema o total das procuras = 10+20+60 = 90 é igual ao total das ofertas = 40+50 = 90, pelo que se designa como equilibrado. A resolução passa pela obtenção duma solução inicial X_{ij}: (**Quantidade** a transportar da Origem i para o Destino j) por um de vários métodos disponíveis, mas consideraremos apenas o método do canto NorOeste (Canto Superior Esquerdo), que consiste em aumentar X_{11} até 10 Toneladas, ficando a Cantina 1 completamente abastecida. No novo Canto Noroeste (a coluna 1 está "despachada") podemos aumentar X_{12} para 20 Toneladas e assim sucessivamente até obtermos o quadro seguinte em que apresentamos não os preços C_{ij} mas sim Toneladas X_{ij}:

Toneladas	Cantina 1	Cantina 2	Cantina 3
Herdade 1	10	20	10
Herdade 2	0	0	50

Esta solução teria um custo de 2x10+3x20+4x10+5x50=370 €
Finalmente resta verificar se a solução obtida é óptima. Para tal vamos usar o método mais simples, conhecido por *Steppimg Stone* publicado por Charnes e Cooper em 1954.
Experimentemos enviar uma tonelada da Herdade 2 para a Cantina 1, isso obrigaria a baixar X_{11} de 10 para 9, a aumentar X_{13} de 10 para 11 e finalmente a diminuír X_{23} de 50 para 49.
O acréscimo do preço seria de: +1x7-1x2+1x4-1x5=4. Conclui-se que esta alteração piorava o objectivo de minimizar o custo.
Repetindo para X_{22}, enviar uma tonelada da Herdade 2 para a Cantina 2, obtinhamos uma alteração do preço global de: +1x6-1x3+1x4-1x5=2. Conclui-se que este custo seria superior aos 370€ que já tinha obtido. Como não temos mais variáveis nulas para experimentar aumentar, a solução obtida era óptima. Repare-se que este problema foi o mais simples que conseguimos arranjar. Geralmente surgem dificuldades com degenerescência e raramente a solução inicial é óptima.

Jorge Santos, Palmira Caseiro, Russell Alpizar-Jara
Departamento de Matemática da Universidade de Évora